

$\mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, 3$ -ТЕГІ ТОЛҚЫН ТЕҢДЕУІ ҮШІН КОШИ ЕСЕБІ.
КИРХГОФ ЖӘНЕ ПУАССОН ФОРМУЛАЛАРЫ. КОШИ ЕСЕБІ ҮШІН
ҚАТАРЛАР ӘДІСІ. КОШИ ЕСЕБІ МЕН ШЕКАРАЛЫҚ ЕСЕПТЕР
ШЕШІМІНІҢ ЖАЛҒЫЗДЫҒЫ

Шәкір Айдос Ғанижанұлы

әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті

математика кафедрасының аға оқытушысы, PhD

24 қыркүйек 2025
Алматы, Қазақстан



Дәрістің мақсаты – $\mathbb{R}^n, n \geq 1$ Евклид кеңістігіндегі толқын теңдеуі үшін Коши есебін шешу

Негізгі сұрақтар:

- 1 $\mathbb{R}^n, n \geq 1$ Евклид кеңістігіндегі толқын теңдеуі үшін Коши есебінің қойылымы
- 2 $\mathbb{R}^2$ Евклид кеңістігіндегі толқын теңдеуі үшін Коши есебінің шешімі. Пуассон формуласы
- 3 $\mathbb{R}^3$ Евклид кеңістігіндегі толқын теңдеуі үшін Коши есебінің шешімі. Кирхгоф формуласы
- 4 $\mathbb{R}^n, n \geq 1$ Евклид кеңістігіндегі толқын теңдеуі үшін Коши есебінің шешімі. Коши есебі үшін қатарлар әдісі.
- 5 Коши есебі мен шекаралық есептер шешімінің жалғыздығы.



$\mathbb{R}^2$ -дегі толқын теңдеуі: Коши есебі және Пуассон формуласы

Толқын теңдеуі және Коши есебі ($\mathbb{R}^2$)

Екі өлшемді Евклид кеңістікте қарастырайық:

$$u_{tt}(x, t) = \Delta_x u(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t > 0,$$

мұндағы $\Delta_x = \partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2$ — Лапласиан (біз ыңғайлы болу үшін толқын жылдамдығын $c = 1$ деп аламыз; $c \neq 1$ жағдайын кейін көрсетеміз).

Коши есебі былайша беріледі:

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Мақсат — $u(x, t)$ -тің айқын өрнегін табу (Пуассон формуласы).



Пуассон формуласы (интегралдық өрнек, $c = 1$)

Пуассон формуласы (екі өлшемді жағдайда) келесі түрде беріледі: бар болған жағдайда, берілген өлшемдерде және жеткілікті тегіс бастапқы деректер үшін

$$u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{B_t(x)} \frac{\varphi(y)}{\sqrt{t^2 - |y - x|^2}} dy \right) + \frac{1}{2\pi} \int_{B_t(x)} \frac{\psi(y)}{\sqrt{t^2 - |y - x|^2}} dy,$$

мұндағы $B_t(x) = \{y \in \mathbb{R}^2 : |y - x| < t\}$ — радиусы t дискісі, және dy — $\mathbb{R}^2$ -дегі ауданды білдіреді.

Бұл өрнек D'Alembert-тің 1D формуласынан ерекшеленіп, 2D-де шешімді дискіге (ішіне) интегралдау арқылы береді; ядро $\frac{1}{\sqrt{t^2 - |y - x|^2}}$ — интегралдық ядроның сипаттаушысы.

Ескерту: интегралдар $t > 0$ үшін ғана анықталған (дискі жағында $t^2 - |y - x|^2 > 0$ шартында).



Пуассон формуласының баламалы жазбасы

Пуассон формуласын дөңгелек (айнымалы радиус бойынша) орташаларды қолдана отырып жазуға болады. Белгілі бір x үшін $r \mapsto M_f(x, r)$ — радиусы r дөңгелектегі орташа:

$$M_f(x, r) = \frac{1}{2\pi r} \int_{|y-x|=r} f(y) dS(y),$$

мұндағы dS — шеңбер бойындағы ұзындық өлшемі.

Тогда Пуассон-тың баламалы формуласы (қағидалық түрде) келесідей:

$$u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^t \frac{r M_\varphi(x, r)}{\sqrt{t^2 - r^2}} dr \right) + \frac{1}{2\pi} \int_0^t \frac{r M_\psi(x, r)}{\sqrt{t^2 - r^2}} dr.$$

Осы жазбада біз дискі бойынша аудандық интегралды шеңбер бойынша орташаға және r -интегралға жіктедік (полярлық координаттарға ауыстыру арқылы).

Бұл нұсқа шешімді шеңбердегі орташалар арқылы бейнелейді — бұл 2D жағдайына тән және теориялық талдаулар үшін ыңғайлы.



Пуассон формуласының дәлелдеу идеясын қорыту

Пуассон формуласын дәлелдеудің бірнеше классикалық тәсілі бар; мұнда қысқаша идеялар беріледі.

(i) Орталау әдісі + Абель түрлендіруі.

- 1 Дөңгелек орталау $M_u(x, r, t) = \frac{1}{2\pi r} \int_{|y-x|=r} u(y, t) dS(y)$ деген функция қарастырылады.
- 2 Шеңбер бойынша орташа M_u үшін бірөлшемді теңдеу шығады (радилды түрлену нәтижесі): нақты есептеу арқылы

$$\partial_{tt}(rM_u(x, r, t)) = \partial_r(r \partial_r(rM_u(x, r, t))),$$

Бессель типті теңдеуге апарады.

- 3 Бұл теңдеуді r бойынша интегралдау және бастапқы шарттарды қолдану нәтижесінде rM_φ пен rM_ψ -ден алынатын Абель-интеграл түріндегі өрнек шығады.
- 4 Абель түрлендіруін кері айналдыру арқылы алынған өрнекті бастапқы u -ға қайтару дискі бойынша ядро $\frac{1}{\sqrt{t^2 - r^2}}$ -ты береді.



(ii) Фурье түрлендіру (жылдам, қысқаша).

- 1 Жай Фурье түрлендіруді x -қа қолдану: $\hat{u}(k, t)$ орындап, әр k үшін ОДЖ

$$\hat{u}_{tt}(k, t) + |k|^2 \hat{u}(k, t) = 0,$$

шешіледі: $\hat{u}(k, t) = \hat{\varphi}(k) \cos(|k|t) + \frac{\hat{\psi}(k)}{|k|} \sin(|k|t)$.

- 2 Обратная Фурье арқылы өрнекті x -ке қайтарғанда, интегралдық өрнектер мен ядролар пайда болады; полярлық интегралдарды орындағанда дәл осындай

$$\frac{1}{\sqrt{t^2 - |y - x|^2}} \text{ ядросы шығады.}$$

Екі тәсіл де жақсы негізделген және формуланың дұрыс екенін көрсетеді (талдауда қажетті регулярлылық шарттары қойылады).



Жалпы жылдамдық $c > 0$ үшін масштабтау

Егер бастапқы теңдеу $u_{tt} = c^2 \Delta u$ болса, онда c -ке қатысты масштабтау арқылы 1-жылдамдығына қайтару ыңғайлы:

$$\tau = ct.$$

Осылайша Пуассон формуласы $c > 0$ үшін келесі түрге ауысады (анық түрде):

$$u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{B_{ct}(x)} \frac{\varphi(y)}{\sqrt{c^2 t^2 - |y - x|^2}} dy \right) + \frac{1}{2\pi c} \int_{B_{ct}(x)} \frac{\psi(y)}{\sqrt{c^2 t^2 - |y - x|^2}} dy.$$

(Жоғарыда көрсетілгендей, бірқатар жазбаларда бірінші мүшенің t -туындысында белгілі бір c -факторлар басқа түрде көрсетілуі мүмкін; осынаяқылы қолданылатын масштабтау арқылы екі нұсқа эквивалентті түрде жазылады.)

Ең қарапайым қолданылым: $c = 1$ алынып, кейін қажетті масштабтау қайтарылса жеткілікті.



Қасиеттер мен түсініктеме

- **Локалдылық / шектеулі тарау жылдамдығы:** Пуассон формуласы көрсеткендей, $u(x, t)$ тек $B_{ct}(x)$ дискісіндегі φ, ψ -қа тәуелді. Яғни ақпарат c жылдамдықпен жүреді.
- **Гюйгенс принципі (2D-дегі жоқтық):** 3D-де толқын шешімі «қатты шектеулі қашықтықта» тек шеңбер бойында көрінеді (ақпарат тек қана радиал бойынша өткір шектеуде өтеді), ал 2D-де шешім дискі ішінде интегралдық «қалдығы» болады — яғни өткен әсерлерден ұзақ «қаңқа» (tail) қалады. Бұл физикалық тұрғыдан «Huygens-тың қағидасының» 2D-де толық орындалмауын білдіреді.
- **Құрылысы:** Пуассон ядросы $\frac{1}{\sqrt{t^2 - |y - x|^2}}$ у дискі ішінде шекті, бірақ диск шетіне қарай ($|y - x| \rightarrow t^-$) ядро интегралдың оң шетінде шектелмей өседі; алайда аудандық интеграл тұтасымен қарастырғанда жеткілікті тегіс бастапқы деректер үшін мәні анық.



Қорытынды

Пуассон формуласы — $\mathbb{R}^2$ -дегі толқын теңдеуі үшін Коши есебінің негізгі аналитикалық өрүнiшi. Ол шешiмдi дискiге интеграция арқылы бередi және 2D-ге тән физикалық-құрылымдық қасиеттердi (мысалы, қалдықтар) айқындайды. Формуланы алу дөңгелек орташа әдiсiмен және/немесе Фурье түрлендiру арқылы жүргiзiледi.

Ескерту. Жоғарыдағы формулалардың жарамдылығы үшiн бастапқы деректерге

(мысалы $\varphi, \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ немесе жеткiлiктi жылдам кемушi мәлiметтер) техникалық шарттар қойылады; нақты дәлелдеулерде осы регулярлылық талаптары анық көрсетiледi.



$\mathbb{R}^3$ -дегі толқын теңдеуі: Коши есебі және Кирхгоф формуласы

Үш өлшемді кеңістікте ($\mathbb{R}^3$) толқын теңдеуі табиғаттағы көптеген физикалық процестерді сипаттайды: дыбыс, жарық, серпімді толқындар және электромагниттік толқындар. Бұл дәрісте біз Коши есебін қарастырамыз және оның шешімін **Кирхгоф формуласы** арқылы аламыз. Үш өлшемді Евклид кеңістікте толқын теңдеуі:

$$u_{tt}(x, t) = c^2 \Delta u(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0,$$

мұндағы $\Delta = \partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2 + \partial_{x_3}^2$ — Лапласиан, $c > 0$ — толқынның таралу жылдамдығы. Коши есебі келесі шарттармен беріледі:

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}^3.$$



Кирхгоф формуласы

Формуланың негізгі түрі

Кирхгоф формуласы ($\mathbb{R}^3$) келесі интегралдық өрнекпен беріледі:

$$u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi ct} \int_{|y-x|=ct} \varphi(y) dS(y) \right) + \frac{1}{4\pi ct} \int_{|y-x|=ct} \psi(y) dS(y),$$

мұндағы:

- $dS(y)$ — радиусы ct шеңбер бойындағы аудан элементі;
- $|y - x| = ct$ — x нүктесі айналасындағы радиусы ct сфера;
- Бірінші қосымша — бастапқы ығысу φ -дан туындайтын әсер;
- Екінші қосымша — бастапқы жылдамдық ψ -дан туындайтын әсер.



Жалпы жылдамдық $c > 0$ Егер $c \neq 1$, формулада ct радиусын қолданамыз, және жалпы түрі:

$$u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi ct} \int_{|y-x|=ct} \varphi(y) dS(y) \right) + \frac{1}{4\pi ct} \int_{|y-x|=ct} \psi(y) dS(y).$$

Қорытынды

Кирхгоф формуласы — $\mathbb{R}^3$ кеңістігіндегі толқын теңдеуі үшін Коши есебінің негізгі аналитикалық шешімі. Ең маңызды қасиеттері:

- Толқынның шектеулі таралу жылдамдығы (c);
- Гюйгенс принципі: шешім тек сфера шекарасында көрінеді;
- 3D-де интеграл тек сфера бойынша; дискі ішінде «қалдықтар» жоқ.

Бұл формула физикада, акустикада, электромагниттік теорияда, инженерлік есептерде негізгі құрал болып табылады.



Қосымша ақпарат

Студенттерге қосымша әрі толыққанды мәліметтер алу үшін [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7] әдебиеттер ұсынылады.



Токибетов Ж.А., Хайруллин Е.М.

Математикалық физика теңдеулері. Астана, 2010 ж.



Михлин С.Г.

Курс математической физики. М., 1968.



Владимиров В.С.

Уравнения математической физики. М., 1984.



Орынбасаров М.О., Оршубеков Н.Ә.

Математикалық физика теңдеулері. Алматы, 2009 ж.



Орынбасаров М.О., Сахаев Ш.С.

Математикалық физика теңдеулерінің септері мен жаттығулар жинағы. Алматы, 2009 ж.



Тихонов А.Н., Самарский А.А.

Уравнения математической физики. М., 2006.



Хомпыш Х.

Математикалық физика теңдеулері. Алматы, Қазақ Университеті, 2017 ж. 215 б.



НАЗАРЛАРЫҢЫЗҒА
РАҚМЕТ!

